

## СОВРЕМЕННЫЕ УПРАВЛЕНЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

**В.К. Горбунов, В.Г. Деревенский**

### **ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ МАЛОГО ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА РЕГИОНОВ РОССИИ: О МЕТОДЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ<sup>1</sup>**

Рассматривается применение метода производственных функций (ПФ) для экономического анализа регионального консолидированного малого предпринимательства (МП) в условиях когда производственная статистика не представляет текущей капитализации объекта (стоимости производственных фондов), а представляет производственные инвестиции наряду с затратами труда и валовым оборотом малых предприятий. На реальных статистических данных показана методологическая несостоятельность метода пространственной регрессии для построения инвестиционной ПФ «малый бизнес региона» по набору одновременных данных для регионов России. Отмечена возможность построения стандартных капитальных ПФ регионального МП по временным рядам указанных показателей.

**Ключевые слова:** производственные функции, малое предпринимательство, основные фонды, производственные инвестиции, пространственная регрессия.

The problem under consideration is the application of the production functions (PF) method for economic analysis of a regional consolidated small business (SB) in conditions, when the production statistics does not represent current capitalization of the object (value of production funds), but represents production investments along with labor costs and total turnover of small enterprises. Methodological failure of the cross-section regression (CSR) for the construction of investment PFs of SB of Russia regions is

---

*Горбунов Владимир Константинович* — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник УНИ Ульяновского государственного университета; *e-mail:* vkgorbunov@mail.ru

*Деревенский Владимир Геннадьевич* — студент группы ЭММ-О-08, Ульяновский государственный университет.

<sup>1</sup>Исследование поддержано Минобрнауки России — задание № 2014/296 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания, тема «Развитие математических моделей и методов анализа производства и рыночного спроса».

demonstrated on real data. Possibility of constructing standard PFs of region SB on time-series of the production statistics mentioned above is noted.

**Key words:** production functions, small business, production funds, production investments, cross-section regression.

## Введение

Метод производственных функций (ПФ)<sup>2</sup> можно отнести к высоким технологиям экономического анализа крупных производственных объектов (фирм и производственных объединений), производственных секторов и отраслей, а также региональных и национальных экономик, рассматриваемых в целом. В данной работе мы ограничиваемся анализом применения метода ПФ для моделирования малого предпринимательства (МП) регионов России, рассматриваемого консолидированно как единый объект, отнесенный к некоторому региону.

Малое предпринимательство в соответствии с современным законодательством<sup>3</sup> — это совокупность индивидуальных предпринимателей и предприятий численностью до ста человек, создающих продукты и услуги для населения и других экономических агентов с целью получения прибыли. Такая совокупность, отнесенная к крупному городу, региону или стране, может рассматриваться как специфический производственный сектор типа черного ящика и соответственно исследоваться методом ПФ. Актуальность таких исследований определяется особой ролью, которую российское правительство, проводящее либерально-рыночные преобразования экономики России послесоветского периода, отводит малому предпринимательству как альтернативе индустриальной модернизации.

Производственная функция — это отображение, ставящее в соответствие каждому набору выделенных производственных факторов из некоторой области, называемой *экономической областью*<sup>4</sup>, значение выпуска, измеряемое, как правило, стоимостью продукции за определенный период (обычно это год). При этом предполагается, что все факторы используются рационально в со-

---

<sup>2</sup> См.: *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: Теория, методы, применение. М., 1986; *Hackman S.T.* Production Economics: Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives. Berlin: Springer, 2008; *Горбунов В.К.* Производственные функции: Теория и построение: Учеб. пособие. Ульяновск, 2013.

<sup>3</sup> Малое и среднее предпринимательство в России, 2008: Стат. сборник. М., 2008.

<sup>4</sup> Множество значений аргументов (факторов производства), на котором функция возрастает и квазивогнутая.

ответствии с квалификацией и уровнем организации и управления объектом. Среди производственных факторов важнейшими являются *основные фонды (капитал) и труд*. Соответствующие функции будем называть *капитальными ПФ*. Количество используемых фондов и выпускаемой продукции измеряется стоимостью, количество труда может измеряться как стоимостью (оплаты труда), так и рабочим временем или численностью занятых.

Построение ПФ для исследуемого производственного объекта позволяет получить содержательную экономическую информацию, необходимую для принятия обоснованных и эффективных управленческих решений. Это показатели средней и предельной эффективности использования факторов, эластичности выпуска относительно затрат факторов и масштаба производства, эластичности замещения одного фактора другим, функции прибыли и издержек. Для построения ПФ конкретного объекта требуется информация об использовании производственных факторов и выпуске на некотором *временном промежутке* сбора производственной информации. Основной способ — это метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому выбирается некоторый параметрический класс функций и параметры оцениваются минимизацией квадратичной невязки регрессионной системы.

Особенностью, осложняющей применение стандартного подхода для построения капитальных ПФ в современных условиях России, является неизвестность доли реально используемых фондов из их общего количества, находящегося на балансе исследуемого объекта<sup>5</sup>. Предположение теории производственных функций о рациональности используемых факторов требует определения доли *эффективно используемых фондов* как одного из основных факторов, определяющих выпуск продукции.

Эффект неполного использования балансовых фондов характерен для рыночной экономики в целом, и он особенно значим для российской экономики послесоветского периода в связи с ее деиндустриализацией и переводом в торгово-сырьевой тип. При этом стандартная отчетность о балансовых фондах не представляет долю реально работающих фондов. Рыночную конъюнктуру более адекватно представляют производственные инвести-

---

<sup>5</sup> См.: Воскобойников И.Б. О корректировке динамики основных фондов в российской экономике // Экономический журнал ВШЭ. 2004. № 1. С. 3—20; Горбунов В.К., Львов А.Г. Построение производственных функций по данным об инвестициях // Экономика и математические методы. 2012. № 2. С. 95—107; Горбунов В.К., Крылов В.П. Производственные функции и эффективные фонды // Труды VI Всеросс. симп. по экономической теории. Т. 2. Екатеринбург, 2014. С. 50—52.

ции. По этой причине ряд авторов стали строить так называемые «инвестиционные» ПФ, отличающиеся от традиционных *капитальных функций* простой заменой фактора «капитал» на текущие инвестиции<sup>6</sup>. Такие ПФ не отражают процесса накопления и амортизации фондов, и в общем случае они не могут достаточно адекватно представлять реальный производственный процесс.

Сектор малого предпринимательства является новым и развивающимся сектором экономики России, и проблема неиспользуемых фондов для него не является актуальной. Однако понятие «основные производственные фонды» для МП является нечетким. Часто производственная деятельность проходит в жилых помещениях и личных гаражах с использованием бытовой техники. Экономическая политика государства поощряет инвестиции частного предпринимательства в основной капитал, в том числе малого предпринимательства. Соответственно статистическая отчетность МП содержит информацию об инвестициях в основной капитал, но не об используемых производственных фондах. Для полноценного применения метода ПФ к этому сектору необходимо ввести фактор «основные производственные фонды» и предложить метод их косвенной оценки, так как существующая отчетность малых предприятий не может отражать этот реальный фактор в полной мере. Оценке эффективно используемых фондов в национальной экономике современной России посвящены работы российских исследователей<sup>7</sup>. Для сектора МП подобные исследования нам неизвестны.

Попытка построения производственной функции для МП регионов России была предпринята в недавней работе Ю.С. Пиньковецкой «Производственная функция для решения задач управления малым бизнесом в регионах РФ», опубликованной в данном журнале<sup>8</sup>. Следуя за В.А. Бессоновым и Ян Сюань, автор решил построить инвестиционную функцию для регионального МП («малого бизнеса») России. Однако вместо временных рядов ре-

---

<sup>6</sup> См.: Бессонов В.А. Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике // Бессонов В.А., Цухло С.В. Анализ динамики российской переходной экономики. М., 2002. С. 5—89; Сюань Ян. Факторы и стратегии развития малого промышленного бизнеса (на примере России и Китая): Автореф. дисс. ... канд. экон. наук: 08.00.05. М., 2007.

<sup>7</sup> См.: Воскобойников И.Б. Указ. соч.; Ханин Г.И., Фомин Д.А. Потребление и накопление основного капитала в России: альтернативная оценка // Проблемы прогнозирования. 2007. № 1; Горбунов В.К., Львов А.Г. Указ. соч.; Горбунов В.К., Крылов В.П. Указ. соч.

<sup>8</sup> См.: Пиньковецкая Ю.С. Производственная функция для решения задач управления малым бизнесом в регионах РФ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 21. Управление (государство и общество). 2010. № 1. С. 79—88.

гиональных показателей МП Ю.С. Пиньковецкая ограничилась данными МП 78 регионов России за один 2007 г. о следующих показателях: *обороте МП, инвестициях в основной капитал, затратах на заработную плату*. При этом были рассмотрены секторы МП каждого региона как отдельное наблюдение некоторого воображаемого объекта «малый бизнес региона России» и применен метод *пространственной регрессии*.

Метод пространственной регрессии (пространственный МНК, в англоязычной терминологии *Cross-Section Regression*) применяется к одновременным наблюдениям однотипных объектов, различающихся некоторыми количественными характеристиками без нарушения структуры их математической модели, если это можно обосновать. При этом данные о разных объектах формально рассматриваются как различные по времени наблюдения одного объекта, меняющегося относительно выделенных содержательных характеристик (не параметров модели). Такой метод естественно применять в биологии, демографии и медицине, когда временной ряд наблюдений исследуемых показателей развивающегося объекта (популяции данного вида) можно заменить набором показателей подобных объектов различных возрастов или имен. Ю.С. Пиньковецкая, видимо, решила, что малые предприятия всех рассмотренных регионов России однотипны (по роду деятельности, климату, инфраструктуре) и подобны относительно зависимости валового оборота от инвестиций и затрат труда. Она построила таким способом *универсальную ПФ Кобба—Дугласа, определяющую данную зависимость МП любого региона России*.

Вполне очевидно, что при существенном различии регионов России относительно экономических и географических условий, а также масштабов МП<sup>9</sup> функциональные зависимости выделенных показателей регионов должны быть различными. Производственная функция, построенная по одновременному срезу региональных данных, представляет виртуальный объект «малый бизнес региона России». Какого региона, если очевидно значительное разнообразие исследуемых объектов? Вопрос риторический, так как ответ очевиден. Никакого. Соответственно построенная в указанной работе (и ее многочисленных репликах, представленных в eLibrary.ru) ПФ регионального МП не представляет никакой реальный объект.

---

<sup>9</sup> Например, согласно данным Росстата, оборот МП города Москвы в 2007 г. был 4641,5 млрд руб., Ульяновской области — 62 млрд руб. и Республики Калмыкия — 1,9 млрд руб.

Учитывая, однако, что ошибочность работы Ю.С. Пиньковецкой не была выявлена рецензентом и она продолжает публиковать подобные работы<sup>10</sup>, мы представляем в данной статье результаты применения метода пространственной регрессии к использованному ею массиву данных, но с выборками некоторых подгрупп регионов, демонстрирующие ошибки, возможные при использовании построенной универсальной ПФ для конкретных регионов. В первом разделе рассматривается задача построения региональных ПФ в стандартном «временном» и «панельном»<sup>11</sup> вариантах. Пространственная регрессия является частным случаем *панельной регрессии (Longitudinal Regression)*, когда имеется единственное одновременное наблюдение подобных объектов. Здесь также кратко представлены инвестиционные производственные функции и обсуждены их возможности как моделей производства. Во втором разделе методом пространственной регрессии построены инвестиционные ПФ для некоторых подгрупп регионов, демонстрирующие контрпродуктивность подхода Ю.С. Пиньковецкой. В третьем разделе сделаны выводы и указан метод построения капитальных ПФ по информации об инвестициях с одновременной оценкой эффективных фондов, предложенный в работе В.К. Горбунова и А.Г. Львова и вошедший в диссертацию Львова<sup>12</sup>.

## **1. Построение региональных ПФ: временная и пространственная регрессии**

1.1. Пусть некоторая страна состоит из  $R$  регионов. Экономике каждого региона или некоторые секторы экономики будем представлять (моделировать) двухфакторными ПФ. Для простоты изложения будем считать все региональные функции принадлежащими одному параметрическому классу:

$$Y = F(K, L; w), \quad (1)$$

---

<sup>10</sup> См., например: *Пиньковецкая Ю.С.* Методология моделирования малого предпринимательства в регионах // Изв. высш. учеб. заведений. Сер. Экономика, финансы и управление производством. 2012. № 1. С. 95—101; *Она же.* Методический подход к построению производственных функций на основе панельных данных по малому предпринимательству // Вестн. Пермского ун-та. Сер. Экономика. 2012. № 3 (1). С. 77—81.

<sup>11</sup> См.: *Ратникова Т.А.* Введение в эконометрический анализ панельных данных // Экономический журнал ВШЭ. 2006. № 3. С. 267—316.

<sup>12</sup> См.: *Львов А.Г.* Развитие методов построения производственных функций: Дисс. ... канд. экон. наук. Уфа, 2012.

где  $Y$  — стоимость валового выпуска региона или регионального сектора, определяемая факторами данного региона (сектора);  $K$  — стоимость производственных фондов (капитал);  $L$  — затраты труда. Вектор  $w = (w_1, \dots, w_m)$  представляет формальные параметры функции  $F$ . Эта функция в соответствии с экономическим смыслом должна быть положительной при положительных аргументах-факторах ( $K, L$ ), непрерывной, возрастающей и квазивогнутой относительно факторов. Возможны дополнительные условия вогнутости и положительной однородности.

На параметры  $w$  накладываются условия, обеспечивающие требуемые аналитические свойства искомой функции (1). Эти условия определяют допустимое множество параметров  $W$ . Значения параметров для каждого региона, как правило, должны быть различными. Повышение адекватности моделирования может достигаться при использовании различных классов ПФ для разных регионов.

В соответствии с неоклассическим принципом рациональности экономических субъектов в качестве фактора  $K$  — производственные фонды — в модели (1) должны учитываться не *балансовые*, а *эффективные* производственные фонды, реально участвующие в создании продукции. Это делает проблему построения ПФ, адекватных реальности, существенно сложнее, чем это представляют некоторые авторы, строящие такие функции. Наличие достаточно адекватной модели (1) позволяет вычислять принципиально наблюдаемые характеристики производства, отмеченные во введении.

1.2. Стандартная задача построения функции (1) для региона  $r = \overline{1, R}$  решается на основе наблюдений значений региональных показателей — выпуска  $Y_r$  и производственных факторов ( $K_r, L_r$ ), составляющих тройной временной ряд

$$\{Y_{rt}, K_{rt}, L_{rt} : t = \overline{1, T}\}. \quad (2)$$

Для каждого региона требуется так подобрать параметры  $w = w^r$ , чтобы значения (2) удовлетворяли равенствам (1) наилучшим образом относительно выбранного критерия качества.

Вследствие идеализации моделирования и погрешностей измерений равенства (1) на данных (2) в совокупности, как правило, не могут быть удовлетворены. Наиболее распространенный способ «хорошего» удовлетворения этих равенств — метод наименьших квадратов, предложенный на рубеже XVIII и XIX вв. независимо К.Ф. Гауссом и А.-М. Лежандром для решения не-

совместных систем уравнений, связанных с обработкой астрономических измерений.

При построении функции (1) региона  $r$  по наблюдениям (2) МНК применяется к несовместным (как правило) системам уравнений

$$Y_{rt} = F(K_{rt}, L_{rt}; w), t = \overline{1, T}. \quad (3)$$

Этот метод заключается в нахождении параметров  $w = w^r$  из условия минимизации суммы квадратов невязок уравнений (3) на допустимом множестве  $W$ :

$$\varphi_r(w^r) = \min_{w \in W} \sum_{t=1}^T [Y_{rt} - F(K_{rt}, L_{rt}; w)]^2 \quad (4)$$

Задача (4), как правило, разрешима, и точка минимума  $w^r$  называется *псевдорешением* системы (3). Это псевдорешение определяет конкретную ПФ каждого региона  $r = \overline{1, R}$ :

$$Y_r = F(K_r, L_r; w^r). \quad (5)$$

В случае неединственности минимума  $w^r$  или плохой обусловленности минимизируемой функции задачи (4) (относительно параметров  $w$ ) требуется ее *регуляризация* с привлечением дополнительной информации о погрешностях исходных данных и ее решении. Это нетривиальная проблема вычислительной математики<sup>13</sup>.

Вопрос качества решения задачи построения ПФ по статистическим данным часто рассматривается в рамках регрессионного анализа. Однако стандартные предпосылки, лежащие в основе большинства теоретических критериев качества (нормальность распределения ошибок, их независимость и постоянство дисперсии<sup>14</sup>, а также требования линейности или линеаризуемости системы уравнений (1) относительно искомых параметров  $w$ , точной спецификации модели  $F(K, L; w)$ , длинных рядов наблюдений (2) практически невозможно обосновать или обеспечить при построении стационарных (не зависящих явно от времени) ПФ.

---

<sup>13</sup> См.: Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986; Горбунов В.К. Регуляризация нелинейных некорректных задач с параметризованными данными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. М., 2003. С. 418—447.

<sup>14</sup> См.: Воскобойников Ю.Е. Регрессионный анализ данных в пакете Mathematic: Учеб. пособие. СПб., 2011. С. 47—48.



Недостатки стандартных статистических обоснований выбора модели объекта (1) компенсируются содержательной теорией производственных функций, и задачу построения ПФ естественно также рассматривать как аппроксимацию таблично заданной зависимости (2) функцией (1) с заданными аналитическими свойствами<sup>15</sup>. При этом основным критерием качества такой изогометрической аппроксимации естественно считать МНК-меру аппроксимации наблюдаемых выпусков  $\{Y_{rt}\}$  модельными выпусками  $\{F(K_r, L_r; w^r)\}$ , т.е. функционал (4). В качестве дополнительного критерия в данной работе мы используем статистический критерий — коэффициент детерминации  $R^2$ , отражающий корреляцию используемых показателей. Следует учитывать, что критерий детерминации обладает свойством необходимости, как и все статистические критерии. Его «хорошее» значение (близость к единице) необходимо для признания высокого качества регрессии, но оно может соответствовать ошибочному и даже явно бессмысленному моделированию и отражать ложную корреляцию<sup>16</sup>.

1.3. Предположим, что тройной временной ряд (2) слишком короткий, но объекты (здесь — региональные экономики) подобны настолько, что можно ожидать достаточно хорошей аппроксимации каждого набора данных (2) одной функцией  $F(K, L; w)$ . В этом случае данные (2) можно рассматривать как *панельные*, т.е. отражающие динамику однотипных объектов. При этом панельный МНК применяется к одной системе уравнений

$$Y_{rt} = F(K_{rt}, L_{rt}; w), \quad r = \overline{1, R}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (6)$$

и заключается в нахождении одного набора параметров  $\hat{w}$  из условия минимизации суммы квадратов невязок уравнений (6) на допустимом множестве  $W$ :

$$\varphi_0(\hat{w}) = \min_{w \in W} \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T [Y_{rt} - F(K_{rt}, L_{rt}; w)]^2 \quad (7)$$

Решение задачи (7) определяет единую для всех объектов производственную функцию

$$Y_r = F(K_r, L_r; \hat{w}), \quad r = \overline{1, R}. \quad (8)$$

<sup>15</sup> См.: Горбунов В.К. О размерностной проблеме в экономике: производственная функция как псевдочерный ящик // Журнал экономической теории. 2014. № 1. С. 199—212.

<sup>16</sup> См.: Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия. Вып. 2. М., 1977. С. 44—45.

Случай одного по времени наблюдения данных (2), т.е.  $T = 1$ , когда данные составляют набор  $\{Y_{r1}, K_{r1}, L_{r1} : r = \overline{1, R}\}$ , соответствует пространственной регрессии.

Ситуация, когда к множеству производственных объектов можно применить панельный (в частности пространственный) МНК для построения единой ПФ, является исключительной. Так, в работе М. Doms<sup>17</sup> этот метод применен для построения производственной функции по данным об инвестициях (с одновременной оценкой амортизации) для группы сталелитейных заводов, использующих одинаковую технологию.

1.4. Рассмотрим ситуацию, когда вместо используемых производственных фондов  $K$  статистика отражает производственные инвестиции  $I$ . В этом случае, как отмечено во введении, некоторые авторы стали рассматривать (в теории и практическом анализе) инвестиционные ПФ, отличающиеся от традиционных капитальных функций  $F(K, L; w)$  простой заменой фактора «капитал» на текущие инвестиции  $F(I, L; w)$ . Такие ПФ не отражают процесса накопления и амортизации фондов. Инвестиции представляют собой величину типа «поток», а капитал — «запасы». При отсутствии инвестиций производство может некоторое время функционировать за счет накопленного капитала, поэтому в общем случае инвестиционные ПФ не могут достаточно адекватно представлять реальный производственный процесс и вычислять содержательные экономические характеристики, доступные через капитальные ПФ.

Однако в отличие от плохо определенной категории балансовые фонды, отражаемой экономической статистикой<sup>18</sup>, инвестиции лучше определены (если сделать обоснованную поправку на коррупцию) и отражают рыночную конъюнктуру. Если нет возможности выполнить оценку эффективных производственных фондов, то построение инвестиционной ПФ  $F(I, L; w)$  может решить некоторые задачи экономического анализа соответствующего объекта. Задачи МНК построения инвестиционных ПФ по информации

$$\{Y_{rt}, I_{rt}, L_{rt} : t = \overline{1, T}\} \quad (9)$$

идентичны задачам построения капитальных ПФ (1) по информации (2).

---

<sup>17</sup> Doms M. Estimating capital efficiency schedules within production functions // Economic Inquiry. 1996. Is. 1. P. 78—92.

<sup>18</sup> Накопленные балансовые фонды состоят из компонент различных возрастов, подверженных сложным процессам физической и бухгалтерской амортизации с высокой степенью неопределенности их текущего состояния.

## 2. Построение инвестиционных ПФ малого предпринимательства России методом «пространственной регрессии»

Проанализируем результат работы Ю.С. Пиньковецкой, указанной во введении, в которой она построила универсальную инвестиционную ПФ малого бизнеса любого региона России, используя данные о малом предпринимательстве  $R = 78$  регионов России за 2007 г. о следующих показателях:  $Y_r$  — оборот МП,  $I_r$  — инвестиции в основной капитал,  $L_r$  — затраты на заработную плату. Данные об этих показателях можно получить из документов Росстата<sup>19</sup>. Все показатели были приведены к единой стоимостной шкале — млрд руб.<sup>20</sup>

Используя программную систему “Microsoft Excel”, Ю.С. Пиньковецкая построила функцию Кобба—Дугласа (мультипликативную степенную)

$$Y = A \cdot I^\alpha L^\beta \quad (10)$$

с параметрами  $w = (A, \alpha, \beta)$ . Напомним, что степен  $\alpha$  и  $\beta$  этой функции имеют смысл соответствующих *факторных эластичностей*, а их сумма  $\mu = \alpha + \beta$  — это эластичность производства относительно масштаба использования факторов. Это значит, что рост инвестиций на 1% обеспечит рост выпуска на  $\alpha\%$ , рост трудовых затрат на 1% обеспечит рост выпуска на  $\beta\%$ , и пропорциональный рост обоих факторов на 1% обеспечит рост выпуска на  $\mu\%$ .

Автор названного исследования получила оценки  $\hat{A} = 7,766$ ,  $\hat{\alpha} = 0,139$ ,  $\hat{\beta} = 0,930$ . При этом основной критерий качества аппроксимации данных вида (9) (где  $T = 1$ ) функциями класса (10) (невязка (7))  $\varphi_0(\hat{w}) = 2,016E + 12$ , и коэффициент детерминации  $R^2 = 0,925$ . Таким образом, универсальная функция Пиньковецкой типа (8) для малого предпринимательства любого региона России, построенная в классе (10) методом пространственной регрессии, — это функция

$$Y = 7,766I^{0,139}L^{0,930}. \quad (11)$$

---

<sup>19</sup> Малое и среднее предпринимательство в России, 2008: Стат. сборник. Табл. 1.30, 1.41, 1.51. М., 2008; Регионы России. Социально-экономические показатели. 2008: Стат. сборник. Табл. 5.3. М., 2008.

<sup>20</sup> Затраты труда по регионам в этих документах представлены среднесписочными численностями работников МП без внешних совместителей. Эти затраты были преобразованы в стоимость по региональным данным о среднемесячной заработной плате работников МП.

Из приведенных в ее работе данных видно, что задача оценки параметров функции (10) решалась стандартным методом линеаризации регрессионной системы (6) (где  $T = 1$ ) для функции (10) на основе ее логарифмирования. Однако такой прием искажает исходную задачу нелинейного МНК — минимизации функционала (7). Минимизация аналогичного функционала для логарифмированной системы не эквивалентна исходной минимизации (7). Решение задачи (7) в «Excel» (процедура «поиск решения») дает уточнение функции (11)

$$Y = 6,847I^{0,140}L^{0,923}. \quad (12)$$

При этом основной критерий качества  $\varphi_0(\hat{w}) = 4,136E + 09$  и вторичный критерий  $R^2 = 0,977$ . Ввиду известной плохой обусловленности задач построения производственных функций расхождение функций (11) и (12) можно считать непринципиальным.

Как же использовать универсальную функцию (11) или уточненную универсальную функцию (12) для разных регионов России? Автор новой методологии предлагает строить изокванты, изокосты<sup>21</sup> и траектории расширения (она называет это «математическими моделями, основанными на производственной функции») для шести подгрупп регионов, соответствующих некоторому разбиению диапазона валовых оборотов — от минимального 1,9 млрд руб. (Калмыкия) до 1163,3 млрд руб. (Московская обл.)<sup>22</sup>. Групповые изокванты и изокосты нужно строить по среднему значению оборота в подгруппе. На основе анализа шести среднегрупповых изоквант ею построено универсальное «уравнение траектории расширения оборота»

$$L(I) = 6,7098I + 0,0041. \quad (13)$$

Значения факторов ( $I, L$ ), удовлетворяющие этому уравнению, соответствуют их оптимальному соотношению. Автор предлагает использовать данное уравнение при разработке планов развития малого бизнеса в регионах.

Чтобы убедиться в степени ошибочности исследования Ю.С. Пиньковецкой, достаточно построить ПФ того же класса (10) и тем же методом, но для различных подгрупп регионов. Мы приводим два результата такого построения — для третьей

<sup>21</sup> Касательная к изокванте в точке, соответствующей минимуму суммы затрат на заработную плату и инвестиций.

<sup>22</sup> Максимальный по обороту регион г. Москва (4641,5 млрд руб.) не включен в разбиение регионов.

группы ее разбиения и группы регионов Приволжского федерального округа РФ.

В *третью группу Пиньковецкой* входят 17 регионов — республики Дагестан, Карелия, Удмуртская, Чувашия, и области Архангельская, Астраханская, Белгородская, Брянская, Владимирская, Кировская, Курская, Оренбургская, Пензенская, Сахалинская, Тверская, Тульская, Ульяновская. Минимальный оборот МП в этой подгруппе у Тверской области (38,5 млрд руб.), максимальный — у Белгородской области (87,7 млрд руб.), средний оборот равен 44,7 млрд руб. Данных для оценки трех параметров функции (10) вполне достаточно. Построена функция

$$Y = 13\,126 \cdot I^{0,139} L^{0,930}. \quad (14)$$

Критерий невязки  $\varphi_0(\hat{w}) = 1,25E + 08$  и коэффициент детерминации  $R^2 = 0,105$ .

Функция (14), построенная по методике Пиньковецкой, представляет (?) любой регион выделенной подгруппы. Но совершенно другая функция (12), построенная по большему числу регионов, также представляет (?) регионы данной подгруппы.

Низкий коэффициент детерминации построения функции (14) свидетельствует о низком качестве регрессии класса функций Кобба—Дугласа для данной выборки регионов. Аналогичные результаты (существенное различие коэффициентов ПФ и небольшой  $R^2$ ) получаются и для других подгрупп, выделенных по единственному признаку — близости валового оборота.

В *группу субъектов ПФО РФ* входят из 14 регионов — республики Башкортостан, Марий Эл, Мордовия, Татарстан, Удмуртия, Чувашия, области Кировская, Нижегородская, Оренбургская, Пензенская, Самарская, Саратовская, Ульяновская и Пермский край. Эти регионы представляют пять из шести (кроме первой) групп Пиньковецкой, но они более однородны по экономическим и географическим характеристикам. Соответствующая ПФ малого предпринимательства этих регионов

$$Y = 6,15 \cdot I^{0,045} L^{0,989}. \quad (15)$$

Здесь невязка  $\varphi_0(\hat{w}) = 7,13E + 08$ , и коэффициент детерминации  $R^2 = 0,707$  существенно превосходит предыдущее значение 0,105.

Каждая из новых функций (14) и (15) противоречит функции Пиньковецкой (11). Так, для МП любого из учтенных 78 регионов РФ, согласно (11), эластичность выпуска относительно инвестиций равна  $\alpha = 0,139$ , но, согласно (14), для МП регионов третьей группы  $\alpha = 0,001$ , и, согласно (15), для МП регионов

ПФО  $\alpha = 0,045$ . Отметим также, что регионы Кировская, Оренбургская, Пензенская, Ульяновская области и республики Удмуртия и Чувашия входят во все три группы и для них получено по три существенно различных значения одного экономического показателя.

### 3. Выводы

Метод панельной (в частности пространственной) регрессии часто может быть обоснованным в биологических, демографических и медицинских исследованиях, но для экономического анализа этот подход можно использовать при очень ограниченных условиях (для существенно подобных объектов), как это сделано в цитированной работе М. Doms.

Рассмотренный на примере указанной статьи Ю.С. Пиньковецкой пространственный МНК для построения универсальной региональной инвестиционной производственной функции для Российской Федерации является глубоко ошибочным. Построенная ею ПФ (11) или ее уточнение (в простейшем классе Кобба—Дугласа) (12) не представляют никакой регион России (относительно консолидированного малого предпринимательства) ввиду существенных отличий регионов относительно видов предпринимательской деятельности, географических условий и других факторов. Соответственно данная виртуальная функция и выведенное из нее уравнение траектории расширения оборота (13) не отражают соответствующие реальные закономерности и не должны использоваться при разработке планов развития малого бизнеса в регионах России. Однако названный автор необоснованного применения пространственного МНК к построению (инвестиционных) производственных функций продолжает публиковать методологически неверные работы, две из которых мы указали. В общем случае для построения производственных функций различных объектов необходимо использовать временные ряды, как это делают более квалифицированные исследователи.

В цитированной выше работе Горбунова и Львова предложен метод построения капитальных ПФ  $F(K, L; w)$ , более информативных, чем инвестиционные  $F(I, L; w)$ , по информации вида (9), где вместо данных об эффективных фондах  $K$  приводятся производственные инвестиции  $I$ . Этот метод одновременно оценивает параметры ПФ и эффективные фонды. Использованию этого метода для регионального малого предпринимательства будет посвящена специальная публикация.

## Список литературы

*Бессонов В.А.* Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике // Бессонов В.А., Цухло С.В. Анализ динамики российской переходной экономики. М., 2002.

*Воскобойников И.Б.* О корректировке динамики основных фондов в российской экономике // Экономический журнал ВШЭ. 2004. № 1.

*Воскобойников Ю.Е.* Регрессионный анализ данных в пакете Mathcad: Учеб. пособие. СПб., 2011.

*Горбунов В.К.* Регуляризация нелинейных некорректных задач с параметризованными данными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. М., 2003.

*Горбунов В.К.* Производственные функции: Теория и построение: Учеб. пособие. Ульяновск, 2013.

*Горбунов В.К.* О размерностной проблеме в экономике: производственная функция как псевдочерный ящик // Журнал экономической теории. 2014. № 1.

*Горбунов В.К., Крылов В.П.* Производственные функции и эффективные фонды // Труды VI Всеросс. симп. по экономической теории. Т. 2. Екатеринбург, 2014.

*Горбунов В.К., Львов А.Г.* Построение производственных функций по данным об инвестициях // Экономика и математические методы. 2012. № 2.

*Кейн Э.* Экономическая статистика и эконометрия. Вып. 2. М., 1977.

*Клейнер Г.Б.* Производственные функции: Теория, методы, применение. М., 1986.

*Львов А.Г.* Развитие методов построения производственных функций: Дисс. ... канд. экон. наук. Уфа, 2012.

Малое и среднее предпринимательство в России, 2008: Стат. сборник. М., 2008. URL: [http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc\\_1139841601359](http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1139841601359)

*Пиньковецкая Ю.С.* Производственная функция для решения задач управления малым бизнесом в регионах РФ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 21. Управление (государство и общество). 2010. № 1.

*Пиньковецкая Ю.С.* Методология моделирования малого предпринимательства в регионах // Изв. высш. учеб. заведений. Сер. Экономика, финансы и управление производством. 2012. № 1.

*Пиньковецкая Ю.С.* Методический подход к построению производственных функций на основе панельных данных по малому предпринимательству // Вестн. Пермского ун-та. Сер. Экономика. 2012. № 3 (1).

*Ратникова Т.А.* Введение в эконометрический анализ панельных данных // Экономический журнал ВШЭ. 2006. № 3.

Регионы России, социально-экономические показатели. 2008: Стат. сборник. М., 2008. URL: [http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc\\_1138623506156](http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1138623506156)

Сюань Ян. Факторы и стратегии развития малого промышленного бизнеса (на примере России и Китая): Автореф. дисс. ... канд. экон. наук. М., 2007.

Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986.

Ханин Г.И., Фомин Д.А. Потребление и накопление основного капитала в России: альтернативная оценка // Проблемы прогнозирования. 2007. № 1.

Doms M. Estimating capital efficiency schedules within production functions // Economic Inquiry. 1996. Is. 1.

Hackman S.T. Production Economics: Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives. Berlin: Springer, 2008.